

KATI CISİMLERİN HACİM VE HACİM BELİRSLİKLERİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

Ümit Yüksel Akçadağ, Sevda Kaçmaz, Orhan Sakarya, Vahit Çiftçi
TÜBİTAK; Ulusal Metroloji Enstitüsü

ÖZET

Bu çalışmada, UME'de tasarılanıp imal edilmiş olan primer seviyedeki bir hacim ölçü düzeneği ve standart bir kütle seti kullanılarak, yerine koyma yöntemi ile havada ve suda tartım işlemleri yapılarak 1 g -1 kg arası kati cisimlerin hacim ve hacim belirsizliklerinin belirlenmesi amaçlanmış olup bu amaçla hacim ve hacim belirsizliklerinin matematiksel modellemesi anlatılmıştır.

Anahtar kelimeler: hacim, hidrostatik yöntem ve belirsizlik

1.GİRİŞ

SI-Uluslararası Birimler Sistemin'de yoğunluk türetilmiş bir birimdir. Bir maddenin kütlesinin hacmine oranı olarak tanımlanır ve birimi kg/m^3 'tür.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

Laboratuvar ortamında yapılan kütle ölçümlerinde kütle hacminden dolayı, Arşimet prensibine göre ortaya çıkan hava kaldırma kuvveti etkisinde kalır. Bu nedenle oluşacak hataları en aza indirebilmek için cismin hacminin iyi bir doğrulukla belirlenmesi gereklidir. Bu amaçla bir hacim-yoğunluk ölçü sistemi tasarlanmıştır ve imal edilmiştir. Sistem: terazi, mermer masa, askı telleri, tartım kefeleri, yoğunluk ölçümünde kullanılacak sıvının konulacağı cam silindir ve sıcaklık kontrollü sıvı banyosundan oluşur. Terazi, çevreden kaynaklanan düşük frekanslı titreşimlerin etkisini azaltmak amacıyla bir mermer masa üzerine, sıvıda oluşabilecek yüzey kuvvetlerini en aza indirebilmek amacıyla da Platin-Iridyum alaşımı ince bir tel, askı teli olarak kullanılmıştır. Hava yoğunluğunu belirlemek üzere dirençli termometre, sayısal barometre ve nem ölçer, ayrıca saf suyun sıcaklığına bağlı yoğunluğunu belirlemek üzere de cam termometre kullanılmıştır.

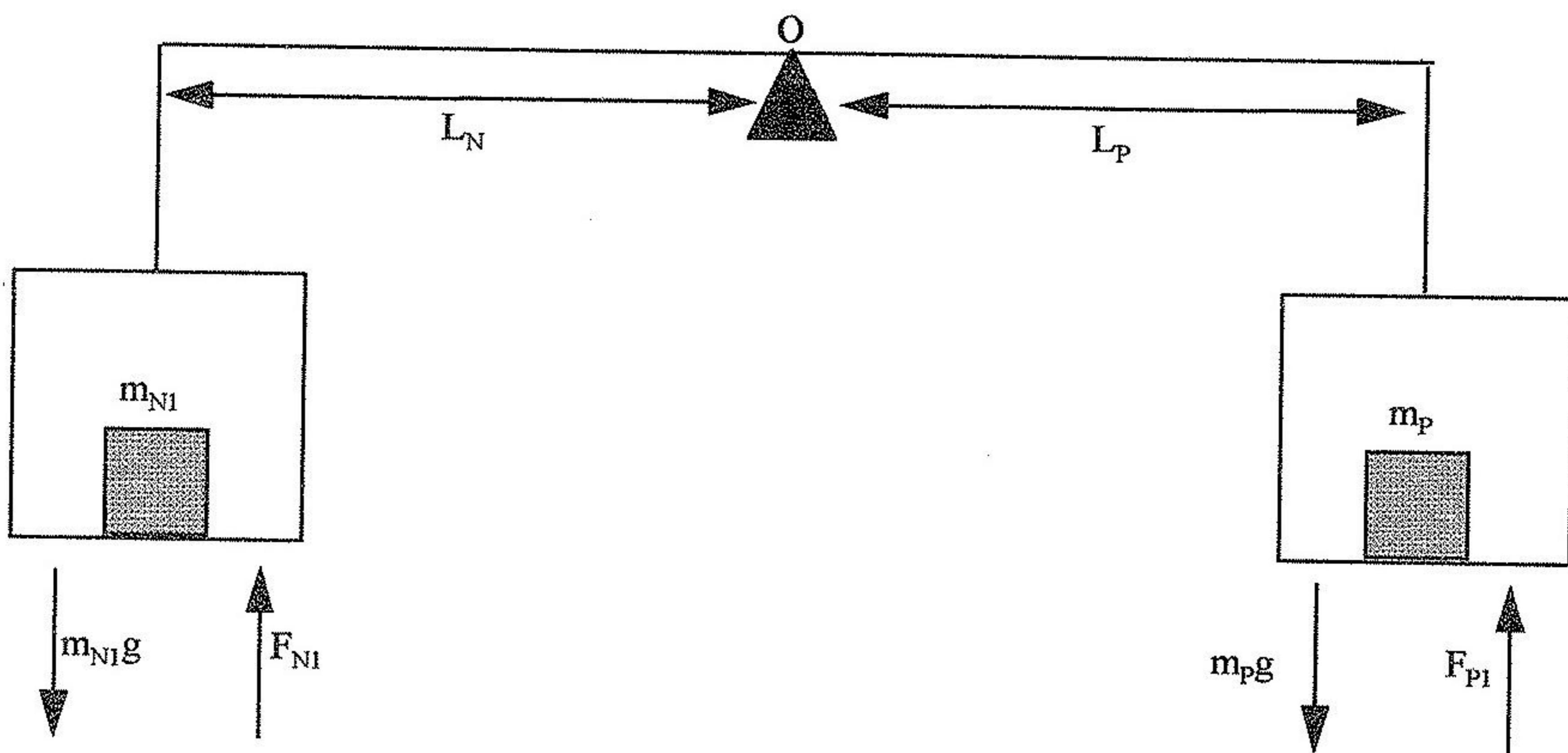
Çalışmanın ana konusu Ulusal Metroloji Enstitüsü'nde (UME) kurulma çalışmaları süren kütle skalarında kullanılacak olan kütlelerin hacimlerinin doğruluklu olarak belirlenmesidir. Bu amaçla kalibreli bir kütle seti kullanılarak hidrostatik tartım yöntemi ile standart ve numune kütle hava ve saf su ortamında yerine koyma yöntemine göre karşılaştırılmışlardır.

2. ÖLÇÜM YÖNTEMİ

Numune kütlenin hacim değeri önce hava, daha sonra saf su ortamında tartım yapılarak bulunur. Bu yöntemde terazi ve saf su, standart ve numune kütleyi karşılaştırmak için bir araç olarak kullanılmıştır.

2.1 Hava ortamında tartım

Standart kütle (m_N) ve numune kütle (m_P) yerine koyma yöntemine göre NPPN sırası ile bir kaç çevrimden oluşan bir ölçüm serisi ile karşılaştırılırlar. Hava ortamına ilişkin en temel çizim (Şekil 2.1)'de verilmiştir. F_{N1} ve F_{P1} net kuvvetleri, L_N ve L_P terazinin kol uzunluklarını, m_{N1} ve m_P standart ve numune kütleleri ve V_{N1} ve V_P ise standart ve numune kütlelerin hacimlerini simgelemektedir [1],[2],[3].



Şekil 2.1 Hava ortamında tartım için en temel düzenek

Yukarıdaki şekilde göre O denge noktasına göre momentlerin toplamı, $L_N = L_P = L$ iken yazılırsa ve m_P çekilirse (2.1) denklemi elde edilir.

$$m_P = m_{N1} + \rho_{L1}(V_P - V_{N1}) + \Delta\bar{w} \quad (2.1)$$

ρ_{L1} : Hava ortamında tartım esnasındaki hava yoğunluğu

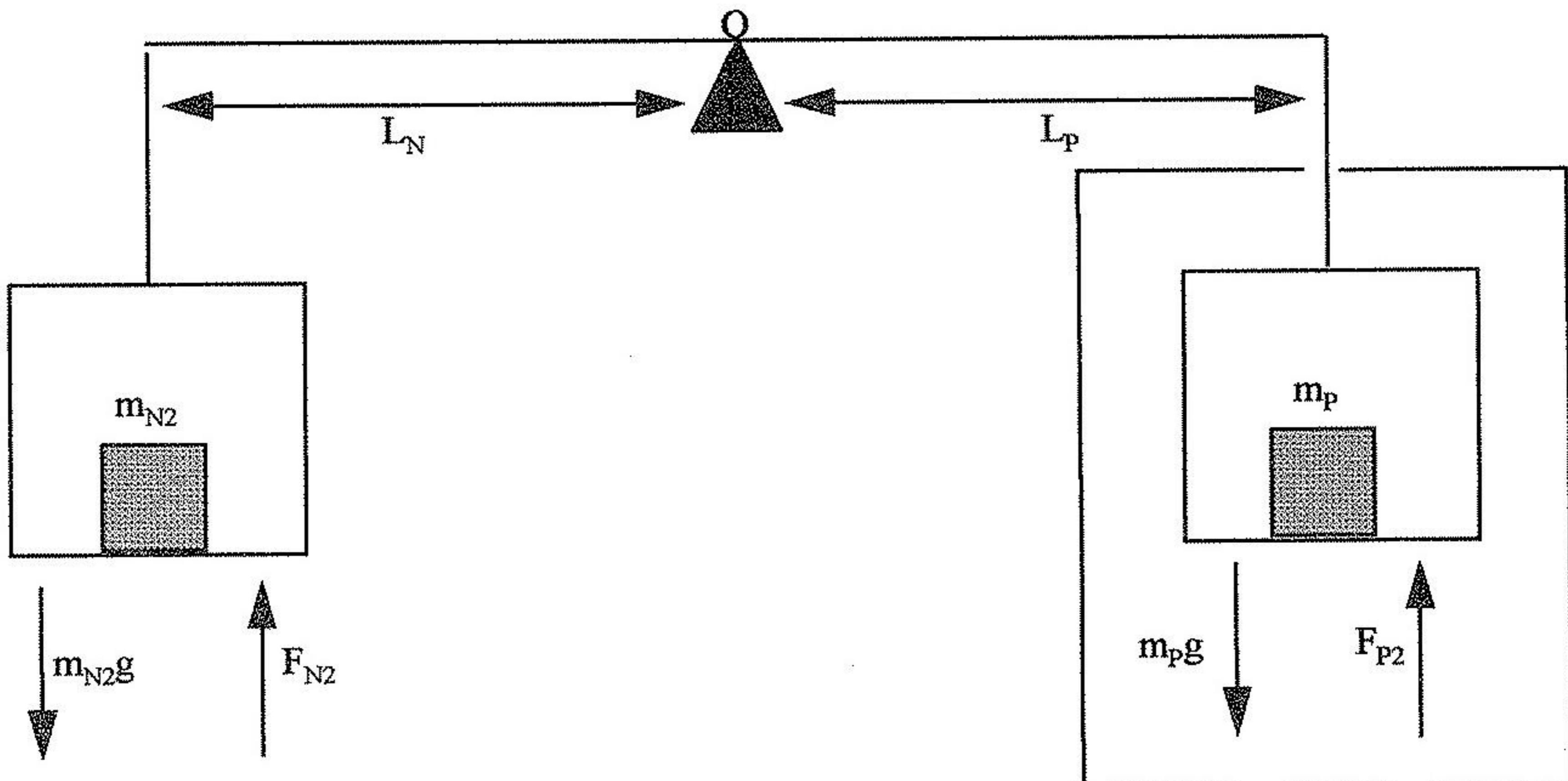
$\Delta\bar{w}$: $m_P - m_{N1}$ (Terazi gösterge farkı)

2.2 Saf su ortamında tartım

Numune kütle saf suya daldırıldıkten sonra, aşkı telleri vasıtası ile hava ortamında bulunan terazi ile bağlantılı kefe üzerine konulur ve tartılır, daha sonra kefe tartılır ve bu ikisinin tartım farkı alınır. Elde edilen tartım farkı kadar standart kütle, standart kütle setinden seçilir. Yerine koyma

yöntemine göre sırası ile standart kütleler (m_N) hava ortamında bulunan terazinin üst kefesinde, numune kütlesi (m_p) saf su içerisinde bulunan kefede NPPN sırası ile tartılırlar. Her bir tartma çevrimi (NPPN) için ortam şartları olan hava yoğunluğu (ρ_{L2}) ve saf suyun sıcaklığı (t_w) ölçüm cihazlarından okunur.

Suda tartıma ilişkin en temel çizim (Şekil 2.2)'de verilmiştir. Burada F_{N2} ve F_{P2} net kuvvetleri, L_N ve L_P terazinin kol uzunluklarını, m_{N2} ve m_p standart ve numune kütleleri, V_{N2} ve V_p standart ve numune kütlelerin hacimlerini ve ρ_w sıcaklığın bir fonksiyonu olarak elde edilen saf suyun yoğunluğunu simgelemektedir.



Şekil 2.2 Suda tartım için en temel düzenek

(Şekil 2.2)'ye göre O denge noktasına göre momentleri toplamı, $L_N = L_P = L$ iken yazılırsa ve m_p çekilirse (2.2) denklemi elde edilir [1],[4].

$$m_p = m_{N2} \cdot V_{N2} \rho_{L2} + V_p \rho_w + \Delta w^* \quad (2.2)$$

ρ_{L1} : Saf su ortamında tartım esnasındaki hava yoğunluğu

ΔW : $m_p - m_{N2}$ (Terazi gösterge farkı)

Denklem (2.1)'den denklem (2.2)'in farkı alınırsa ve V_p çekilirse (2.3) denklemi elde edilir.

$$V_p = \frac{(m_{N1} - \rho_{L1} V_{N1} + \Delta \bar{w}) - (m_{N2} \cdot V_{N2} \rho_{L2} + \Delta w^*)}{\rho_w - \rho_{L1}} \quad (2.3)$$

(2.3) denklemi bulunan numunenin hacim değeri V_p herhangi bir t sıcaklığında bulunmuş bir değerdir. Hacim değerleri $t_0 = 20^\circ\text{C}$ de ifade edilir. Bu nedenle (2.4) denklemi kullanılarak hacim 20°C de ifade edilir.

$$V_P(t_0) = \frac{V_P(t)}{[1 + \alpha_V(t - 20)]} \quad (2.4)$$

α_V : Hacim genleşme katsayısı

Saf suyun yoğunlığını (ρ_w) (2.5) denklemi ile buluruz.

Açık havada saf suyun yoğunluğu 101325 Paskal'da sıcaklığın bir fonksiyonu olarak Kell 1975 tarafından denklem haline getirilmiştir [5].

$$\rho_w = \sum_{n=0}^5 \frac{(a_n t^n)}{1 + bt} \quad (2.5)$$

$$a_0 = 9.9983952 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$$

$$a_1 = 1,6952577 \cdot 10^1 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ kg/m}^3$$

$$a_2 = -7.9905127 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2} \text{ kg/m}^3$$

$$a_3 = -4.6241757 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-3} \text{ kg/m}^3$$

$$a_4 = 1.0584601 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$a_5 = -2.8103006 \cdot 10^{-10} \text{ } ^\circ\text{C}^{-5} \text{ kg/m}^3$$

$$b = 1.6887236 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

(2.5) denklemine ölçüm anındaki suyun sıcaklığı ve diğer sabitler konularak saf suyun yoğunluğu kg/m^3 olarak bulunur.

(2.3) denklemi ile elde edilen V_P değeri suda yapılan tartımla elde edilen sadece tek bir tartım çevrimine (NPPN) göre bulunmuştur. Saf su ortamında bir tartım çevriminden daha çok ölçüm çevrimi için, $i = 1 \dots n$ 'e kadar bir ölçüm serisi için;

$$\Delta w_i^* = \frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{N_1 + N_2}{2} \quad (2.6)$$

$$\Delta w_n^* = \frac{P_{n-1} + P_n}{2} - \frac{N_{n-1} + N_n}{2} \quad (2.7)$$

denklemleri yazılırsa (2.8) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$V_{P_i} = \frac{(m_{N1} - \rho_{L1} V_{N1} + \bar{\Delta w}) - (m_{N2} - V_{N2} \rho_{L2} + \Delta w_i^*)}{\rho_w - \rho_{L1}} \quad (2.8)$$

Ölçülen her bir $\Delta w_i^*, \Delta w_2^*, \dots, \Delta w_n^*$ tartım çevrimi için ortam şartları ölçülmeli ve $V_{P1}, V_{P1} \dots V_{Pn}$ değerleri (2.8) denklemi kullanılarak her değer için belirlenmelidir. (5.26) denklemi ile elde edilen $V_{P1}, V_{P1} \dots V_{Pn}$ değerleri (2.4) denklemi kullanılarak 20°C 'de ifade edilirler. Elde edilen

$V_{P1}(t_0), V_{P2}(t_0) \dots V_{Pn}(t_0)$ hacim değerleri kullanılarak (2.9) denklemi ile ortalama hacim değeri $\bar{V}_p(t_0)$ bulunur.

$$\bar{V}_p = \sum_{i=1}^n \frac{V_p(t_0)}{n} \quad (2.9)$$

$m_{N1}, m_{N2}, V_{N1}, V_{N2}$ değerleri ait oldukları sertifikalardan alınır.

3. STANDART BELİRSİZLİĞİN HESAPLANMASI

Bazen, ölçülen nicelik Y doğrudan ölçülmez fakat N tane X_1, X_2, \dots, X_N gibi başka nicelikten f fonksiyonu ile verilen bağıntıyla elde edilir [6],[7].

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (3.1)$$

Ölçülen nicelik Y için kestirilen y değerleri, X_1, X_2, \dots, X_N için kestirilen girdi değerleri x_1, x_2, \dots, x_N kullanılarak bulunur. Böylece tahmin edilen y değeri $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ifadesi ile bulunur. Ölçüm sonucunda elde edilen y değerinin, $u_c(y)$ olarak gösterilen ve bileşik standart belirsizlik olarak adlandırılan değeri, herbir x_i değerine ait standart belirsizlik $u(x_i)$ değerlerinin bileşiminden elde edilir. x_i ve $u(x_i)$ değerleri X_i niceliklerinin olası dağılımından elde edilir.

Bileşik standart belirsizlik aşağıdaki ifadeyle hesaplanır ve bileşik standart varyansın pozitif

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (3.2)$$

karekökü olarak tanımlanır.

Buradaki f fonksiyonu daha önce (3.1)'de ölçüm modelini belirleyen fonksiyondur. Belirsizlik bileşenlerinden $u(x_i)$ ya standart belirsizliğin A-tipi; tekrarlanan ölçüm sonuçlarına dayanan istatiksel yöntem, örnek olarak deneysel standart sapma yada B-tipi; istatistik olmayan yöntem, örnek olarak kalibrasyon sertifikalarında bulunan veriler yöntemle hesaplanmasıyla belirlenmektedir. $u_c(y)$ bileşik standart belirsizlik olarak kabul edilir ve ölçülen büyülüklük Y ile ilintili kestirilen y değerlerinin dağılımını sergiler.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ kısmi türevler $X_i=x_i$ değerinde hesaplanan $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ türevlere eşittir. Bu türevler genellikle duyarlılık

katsayıları olarak adlandırılır ve x_1, x_2, \dots, x_N değerlerinin değişiminin kestirilen değer y 'yi nasıl etkilediğini gösterir. Pratikte, girdi büyülüklüklerinin küçük değişimi Δx_i ile y 'nin değerinde meydana gelen değişim aşağıdaki ifade ile verilir.

$$(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (3.3)$$

Eğer bu değişimin nedeni x_i 'lerin standart belirsizlikleri ise buna uygun y 'deki değişim $(\partial f / \partial x_i) u(x_i)$ olacaktır. Böylece bileşik varyans $u_c^2(y)$ her bir girdi büyülüğün varyansını içeren bileşenlerin toplamı olarak kabul edilir.

Bu durumda,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[c_i u(x_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (3.4)$$

yazılır. Bu eşitlikte,

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u_i(y) = |c_i| u(x_i) \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır.

Genişletilmiş belirsizlik U bileşik standart belirsizlik $u_c(y)$ ile kapsam faktörü k ile çarpımı sonucunda elde edilir ve kapsam faktörünün değeri genel olarak 2 (%95 güvenirlilik düzeyi) ile 3 (%99 güvenirlilik düzeyi) arasında seçilir

$$U = k u_c(y) \quad (3.6)$$

3.1 Modelleme ile ölçüm belirsizliği hesabı

Genel olarak, (2.8) denklemi kullanılarak elde edilen hacim değerinin belirsizliği aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Ölçülen nicelik olan V_P 'yi (3.1) denklemine göre aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$V_P = f(m_{N1}, m_{N2}, V_{N1}, V_{N2}, \Delta \bar{w}, \Delta \bar{w}_i^*, \rho_{L1}, \rho_{L2}, \rho_w)$$

(3.5) denklemine uygun olarak aşağıdaki denklemler yazılabılır.

$$C_1 = \frac{I}{(\rho_w - \rho_{L1})} \quad U_1(V_P) = \left| \frac{I}{\rho_w - \rho_{L1}} \right| U(m_{N1}) \quad (3.7)$$

$$C_2 = \frac{I}{(\rho_w - \rho_{L2})} \quad U_2(V_P) = \left| \frac{I}{\rho_w - \rho_{L2}} \right| U(m_{N2}) \quad (3.8)$$

$$C_3 = \rho_{LI} \frac{I}{(\rho_w - \rho_{LI})} \quad U_3(V_P) = |\rho_{LI} \frac{I}{\rho_w - \rho_{LI}}| U(V_{NI}) \quad (3.9)$$

$$C_4 = \rho_{L2} \frac{I}{(\rho_w - \rho_{L1})} \quad U_4(V_P) = |\rho_{L2} \frac{I}{\rho_w - \rho_{L1}}| U(V_{N2}) \quad (3.10)$$

$$C_5 = \frac{I}{(\rho_w - \rho_{LI})} \quad U_5(V_P) = |\frac{I}{\rho_w - \rho_{LI}}| U(\Delta \bar{w}) \quad (3.11)$$

$$C_6 = \frac{I}{(\rho_w - \rho_{L1})} \quad U_6(V_P) = |\frac{I}{\rho_w - \rho_{L1}}| U(\Delta \bar{w}_i^*) \quad (3.12)$$

$$C_7 = V_{p_i} \frac{I}{(\rho_w - \rho_{LI})} \quad U_7(V_P) = |V_{p_i} \frac{I}{\rho_w - \rho_{LI}}| U(\rho_{w_i}) \quad (3.13)$$

$$C_8 = \frac{V_{p_i} V_{NI}}{(\rho_w - \rho_{LI})} \quad U_8(V_P) = |\frac{V_{p_i} V_{NI}}{\rho_w - \rho_{LI}}| U(\rho_{LI}) \quad (3.14)$$

$$C_9 = \frac{V_{N2}}{(\rho_w - \rho_{LI})} \quad U_9(V_P) = |\frac{V_{N2}}{\rho_w - \rho_{LI}}| U(\rho_{L2}) \quad (3.15)$$

Yukarıdaki denklemler ve elde edilen hacim değerlerinin standart sapması kullanılarak, A ve B tipi belirsizlikler denklem (3.16) ve (3.17)'deki gibi ifade edilir.

$$U_A^2 = [U_5(V_P)]^2 + [U_6(V_P)]^2 + s^2 \quad (3.16)$$

$$U_B^2 = [U_1(V_P)]^2 + [U_2(V_P)]^2 + [U_3(V_P)]^2 + [U_4(V_P)]^2 + [U_7(V_P)]^2 + [U_8(V_P)]^2 + [U_9(V_P)]^2 \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17) denklemleri kullanılarak bileşik belirsizlik aşağıdaki gibi bulunur.

$$U_C^2(V_P) = U_A^2(V_P) + U_B^2(V_P) \quad (3.18)$$

Genişletilmiş belirsizlik ise, yani $k = \pm 2s$ aralığında ve %95 güvenirlikle $U_G(V_P) = 2U_C(V_P)$ ve V ölçüm sonucu olarak elde edilen hacim olmak üzere; bağıl belirsizlik $\frac{U_G(V_P)}{V}$ dir.

$U(m_{N1})$: Standart kütlenin belirsizliği (Sertifikadan alınır)

$U(m_{N2})$: Standart kütlelerin toplam belirsizliği (Sertifikadan alınır)

$U(V_{v1})$: Standart kütlenin hacim belirsizliği (Sertifikadan alınır)

$U(V_{N2})$: Standart kütlelerin hacimlerinin toplam belirsizliği (Sertifikadan alınır)

$U(\rho_{L1})$: Hava ortamındaki ölçüm esnasındaki hava yoğunluğunun toplam belirsizliği

$U(\rho_{L2})$: Saf su ortamındaki ölçüm esnasındaki hava yoğunluğunun toplam belirsizliği

$U(\bar{\Delta w})$: Havada ortamında yapılan ölçümün standart sapması

$U(\Delta w^*)$: Su ortamında yapılan ölçümün standart sapması

Hava yoğunluğu (3.19) denklemi ile hesaplanır.

$$\rho_L = \frac{0.348444P - h(0.00252t - 0.020582)}{273.15 + t} \quad (3.19)$$

ρ_L : Hava yoğunluğu (kg/m^3)

P: Hava basıncı (mbar)

h: Bağıl nem (% olarak)

t: Ortam sıcaklığı ($^{\circ}\text{C}$)

$U(\rho_{L1})$ ve $U(\rho_{L2})$, (3.19) nolu hava yoğunluğu denklemi (3.5) denklemeye uygulanarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$C_1 = \frac{0.348444}{273.15 + t} \quad U_1(\rho_L) = \left| \frac{0.34844}{273.15 + t} \right| U(P) \quad (3.20)$$

$$C_2 = \frac{0.00252t - 0.020582}{273.15 + t} \quad U_2(\rho_L) = \left| \frac{0.00252t - 0.020582}{273.15 + t} \right| U(h) \quad (3.21)$$

$$C_3 = \frac{0.00252h + \rho_L}{273.15 + t} \quad U_3(\rho_L) = \left| \frac{0.00252h + \rho_L}{273.15 + t} \right| U(t) \quad (3.22)$$

Hava yoğunluğunun toplam belirsizliği (3.23) denklemi ile elde edilir.

$$U^2(\rho_L) = u_1^2(\rho_L) + u_2^2(\rho_L) + u_3^2(\rho_L) \quad (3.23)$$

Ölçüm sonucu V_p , (3.24) denklemi ile elde edilir.

$$V_p = \bar{V}_p(20^\circ C) \pm U_g(V_p) \quad (3.24)$$

4. ÖLÇÜM SONUCU VE SONUÇ

Sayısal değer (g)	Hacim değeri (cm ³)	Hacim belirsizliği (cm ³)	Bağıl hacim belirsizliği
20	2.5406	0.00005	1.90E-05

Tablo (5.1)'de görüldüğü gibi; kütle skalası kurmak için hacimden gelebilecek bağıl hacim belirsizliği en çok $3 \cdot 10^{-4}$ beklenirken UME'de kurulan hidrostatik tartım sistemi ve oluşturulan modellemeler ile 10^{-5} civarında bulunmuştur. Böylece yöntemin başarı ile uygulanabileceğini söylemek mümkündür.

5.KAYNAKLAR

- [1] Ü Akçadağ, Hacim ve yoğunluk ölçüleri için birincil standart olarak kullanılacak bir ölçü düzenegi, AÜFF, 1996
- [2] S. Kaçmaz, Ü Akçadağ, Kütle Metrojisi, UME, 1996
- [3] M. Kochsiek, The determination of mass part 1, PTB-GERMANY, December 1983
- [4] F. Spieweck und H. Bettin, Methoden zur bestimmung der dichte von festkörpern und flüssigkeiten, PTB-W-46 Branunschweig, October, page 7-15
- [5] G.S.Kell, Density, Thermal expansivity and compressibility of liquid water from 0°C to 150 °C: correlation and tables for atmospheric pressure and reviewed and expressed on 1968 temperature scale.J.Chem. & Eng. data 20,1975, s. 97-105
- [6] Guide to expression of uncertainty in measurement, ISO, Switzerland, 1993
- [7] E. Sadikhov, Ölçüm belirsizliği, UME, 1995